МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МНОЖЕСТВА И КЛАССЫ

Дополнительные разделы теории множеств

Долгопрудный
МФТИ 2022

УДК 517.9

Множества и классы (Дополнительные разделы теории множеств) (для студентов) / Составитель В.П. Бурский. – Долгопрудный: МФТИ, 2022. – 22 с.

Пособие содержит краткое изложение некоторых разделов теории множеств, которые, с одной стороны, недостаточно представлены в учебной литературе, а с другой стороны, относятся к числу основополагающих и в теоретической математике, и в математическом образовании. Это – исчисление высказываний, исчисление предикатов, структура теории с примерами (аксиоматика арифметики, геометрии, анализа), аксиоматические теории множеств. Материал этого пособия рассматривается как дополнительный к стандартным разделам логики и теории множеств, читаемым в университетах,

Составитель В.П. Бурский

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие содержит краткое изложение некоторых разделов теории множеств, которые, с одной стороны, недостаточно представлены в учебной литературе, а с другой стороны, относятся к числу основополагающих и в теоретической математике, и в математическом образовании. Это – исчисление высказываний, исчисление предикатов, структура теории с примерами (аксиоматика арифметики, геометрии, анализа), аксиоматические теории множеств. Материал этого пособия следует рассматривать как дополнительный к стандартным разделам логики и теории множеств, читаемым в университетах, конкретнее, он понимается как дополнительный материал к первой главе известного пособия А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина "Элементы теории функций и функционального анализа".

Пособие можно читать независимо от других источников, лишь иногда обращаясь за справками, например, к указанному выше, но следует подчеркнуть, что в пособии отсутствуют теоремы о счётных и континуальных множествах, кардинальные числа, а также структуры порядка и порядковые типы. Строго говоря, желательно, чтобы читатель был знаком с основными понятиями типа объединения, пересечения множеств, мощности множества с теоремой Кантора, счётного множества и располагал некоторым опытом чтения математической литературы, когда нужно иногда задуматься, а иногда посмотреть другую литературу.

Написание данного пособия связано с отсутствием в имеющейся литературе краткого изложения указанных разделов и спровоцировано необходимостью использования в учебном процессе такого понятия, как класс, понимаемый в смысле фон Неймана – Бернайса – Гёделя, без которого не определить понятия категории и функтора – одних из наиболее важных в современной математике. Вообще говоря, для учебных целей, возможно, достаточно определить класс как такое сверхширокое множество, типа множества всех множеств или множества всех групп, которое запрещается рассматривать как элемент какого-то другого множества, дабы не получить противоречие. Но при таком подходе у слушателя возникает естественное желание прояснить для себя как именно и где именно возникает это понятие в теории. Для того, чтобы хоть как-то разобраться в этом вопросе, нужно просмотреть огромное количество разнообразной литературы, понять большое количество построений, часто не связанных с предметом поисков, и потратить (вообще говоря, не бесполезно) уйму времени. Автор надеется, что данное пособие сможет помочь заинтересованному читателю удовлетворить его запросы любознательности на первых порах, а также подсказать литературу для дальнейшего изучения, если его интерес будет иметь устойчивый характер.

1. ТРИ КРИЗИСА В МАТЕМАТИКЕ. ВМЕСТО ВВЕДЕНИЯ

За свою многолетнюю историю математика, как и любая другая область человеческой деятельности, испытала периоды активности и застоя, расцвета и упадка, общественного почитания и неприятия. Среди периодов кризисных явлений, не связанных напрямую с общественными потрясениями, ярче всего выделяются три периода, которые мы сейчас вкратце охарактеризуем.

Первый из них связан с кризисом пифагорейской школы. Пифагорейцами назывались философы, жившие после Пифагора в Древней Греции, её колониях и в Римской империи и считавшие себя учениками и последователями Пифагора. Сам Пифагор, родившийся и живший на острове Самос, а затем на юге современной Италии примерно с 570 г. до 500 г. до нашей эры, предположительно был мистиком, учёным и государственным деятелем аристократического толка. Пифагорейцы, примыкавшие к аристократическим объединениям, выделились из группы софистов, связанных с демократическими движениями. Софисты в своём большинстве подчёркивали реальность изменений, а пифагорейцы стремились найти в природе и обществе неизменное. Достижением пифагорейской школы является утверждение роли доказательства математического утверждения. Они первыми стали считать математическое утверждение установленным, если оно доказано на основании очевидных истин и каких-то ранее доказанных утверждений. Пифагорейцы разделили математику на четыре области (“квадривий”): арифметику, геометрию, астрономию и музыку. Итоги развития пифагорейцами геометрии подведены в “Началах” Евклида (жившего в 340-287 гг. до н.э.), итоги развития арифметики изложены в одной из 13 книг “Начал”, а также в книгах Диофанта (около 250 г. до н.э.). Пифагорейской астрономии посвящён труд Птолемея “Алмагест” (около 150 г. н.э), включающий также некоторые факты тригонометрии и сферической геометрии. Отметим, что эти источники сохраняли своё актуальное значение вплоть до 17-18 века. В теории музыки пифагорейцы использовали обертоны, натуральный звукоряд, была открыта т.н. “пифагорова кома”, сохранившие своё значение до наших дней (см.[5]). Пифагорейская школа просуществовала несколько столетий. Её распад был связан с обнаружением иррациональных чисел. Дело в том, что многие построения пифагорейцев были основаны на предположении о соизмеримости любой пары отрезков. Напомним, что два отрезка соизмеримы, если найдётся третий, укладывающийся целое число раз в первых двух. Предположение о соизмеримости любой пары отрезков означает, что любое действительное число – рационально. Открытие несоизмеримости диагонали квадрата со стороной означало крушение той части рассуждений, которая основывалось на этом предположении. Но главным выводом был тот, что пифагорейцы не могли больше доверять своей интуиции, подсказывавшей исходные “очевидные” истины и потерпевшей сокрушительное фиаско. Следствием был затяжной кризис, отголоском которого являлось критическое отношение к пятому постулату Евклида на протяжении столетий. Как мы знаем, этот кризис окончательно завершился построением теории действительных чисел, причём сразу в трёх различных формах: К. Вейерштрасса, Г. Кантора и Р. Дедекинда (конец 19 века).

Вторым кризисом в математике часто называют длительное отсутствие ясности в природе бесконечно малых и, как следствие, в природе производных и интегралов. Начиная с Ньютона, математики 18 и части 19 века понимали бесконечно малую как некоторую существующую величину, похожую на число, и обходились с ними как с числами. Были выработаны правила обращения с такими величинами, приводящие, чаще всего, к правильным результатам, но, поскольку обоснования этим правилам были чисто умозрительными, нарастающая неудовлетворённость обращения с мистическими величинами отталкивала исследователей. Наступление ясности в дифференциальном исчислении пришло с введения Огюстеном Коши в начале 19 века понятия предела на языке $\varepsilon - \delta$. Все правила дифференциального исчисления получили естественное объяснение и ясное доказательство. В интегральном исчислении ситуацию прояснило определение интеграла, данное Риманом в середине 19 века, и определение интеграла Лебега в начале 20 века.

Под третьим кризисом в математике (или, часто говорят, в основаниях математики) понимается кризисная ситуация, сложившаяся в теории множеств в начале двадцатого века и связанная с обнаруженными противоречиями в рассуждениях. Теория множеств создана в основном в 1872 – 1884 годах в работах немецкого математика Георга Кантора, где были систематически изложены основные разделы теории множеств, включая теорию точечных множеств и теорию кардинальных и трансфинитных чисел. Кантор ввёл в математику главные понятия этой теории и, кроме того, рассуждения нового типа, повсеместно применяющиеся ныне, а именно, рассуждения, до него применявшиеся только к конечным множествам, он стал применять к бесконечным множествам. Однако вскоре было обнаружено, что некоторые рассуждения, сходные с рассуждениями Кантора, ведут к противоречию.

Так, в 1903 году английский математик и писатель (впоследствии лауреат Нобелевской премии по литературе 1950 г. и один из инициаторов Пагуошского движения за мир) Бертран Рассел опубликовал поразительный парадокс, состоящий в следующем. Рассмотрим множество C, состоящее из всех множеств, не содержащих себя в качестве своего элемента, тогда, если C не содержит себя, то, по определению C, оно содержит себя, если же оно содержит себя, то по определению C, оно не содержит себя. Ещё раньше (в 1899 году) сам Кантор обнаружил парадокс, связанный с его известной теоремой: ‘мощность любого множества строго меньше мощности множества его подмножеств’; если теперь T – множество всех множеств, то оно по своему определению имеет наибольшую мощность, что противоречит теореме Кантора. С другой стороны, с давних времён известны логические антиномии. Так, критскому философу Эпимениду (6 век до н.э.) приписывается высказывание “все критяне – лжецы”. В древней “дилемме крокодила” крокодил украл ребёнка, но обещал вернуть отцу, если тот отгадает, вернёт ли ему крокодил ребёнка; неразрешённая проблема встаёт перед последовательным крокодилом, если отец скажет ему, что он не вернёт ребёнка.

Как следствие этих и других парадоксов появились различные мнения о настоящей причине их появления и способах исправления ситуации. Появились и оформились новые научные направления: формализм, логицизм, интуиционизм (конструктивизм) со своими предложениями, построениями и теориями (см. их краткое описание в разделе 7). Но ни одно из этих направлений не только не стало общепризнанной основой построения математики, но и, встретившись каждое со своими трудностями, породило разброд в умах тех, кто задумывался над вопросами оснований. Приведём цитату из книги А.Френкеля и И.Бар-Хилела [1, стр.271]: “Совершенно поразительно, насколько основательно изменились перспективы математики в течение нескольких десятилетий. В 1900 году на втором Международном конгрессе математиков в Париже Гильберт выступил со своим историческим докладом о (нерешённых) математических проблемах, содержащим гордые слова, выражавшие общую уверенность математиков того времени ‘Все вы, конечно, разделяете убеждение, что каждая определённая математическая проблема наверняка может быть строго решена и отдаёте себе отчёт в том, что к вам обращён призыв: Увидел задачу – ищи её решение’ … Уверенность в возможности решения и отличает, видимо, математику от других наук, где призрак вечной неудачи и конечного *ignorabimus* (*не узнаем*, лат.) смущает мысль учёного и подрывает его усилия… Не окончилась ещё первая четверть двадцатого столетия, как вера, выраженная и прославленная в словах Гильберта, вера, бывшая сильнейшим стимулом, вселяющим в математиков уверенность в конечном успехе, оказалась совершенно подорванной; более того, виднейшие математики стали заявлять, что эта вера – всего лишь безосновательный предрассудок”. И далее, на стр.322: “Не существует, да и не предвидится, никакого единого и общепризнанного способа перестройки математики, и в этом смысле кризис оснований всё ещё продолжается”. Об этой увлекательной теме см. приложенный список литературы, и в первую очередь книгу [1].

Но какую бы точку зрения на перестройку оснований математики вы не приняли, в любом случае важнейшей задачей является уточнение тех представлений, которые лежат в основе теории множеств. Аксиоматический метод является, по-видимому, наиболее подходящим для этого и в данном пособии принято использование по возможности именно аксиоматического подхода.

2. МНОЖЕСТВА

В жизни мы постоянно сталкиваемся с различными наборами вещей, предметов, людей и т.д., объединяемых нами в набор по какому-то признаку или свойству. Такие наборы в математике называют множествами. Например, среди всех автомобилей множество двухдвёрных автомобилей выделяется свойством автомобиля быть двухдвёрным, а среди всех кошек, живущих в некотором доме, есть множество пятнистых кошек, выделенных свойством кошки быть пятнистой. Множество библиотечных книг на полке выделяется свойством книги иметь библиотечный штамп, множество красных карандашей — свойством быть красным и т.д. Заметим сразу, что свойство быть автомобилем выделяет множество автомобилей из множества средств передвижения, а свойство книги находиться на данной полке выделяет множество книг, находящихся на этой полке. Заметим также, что каждое <u>множество состоит из элементов</u>. Так, множество автомобилей состоит из автомобилей, говорят, что элементами множества автомобилей являются автомобили; множество библиотечных книг состоит из книг и т.п.

<u>Свойствами элемента являются его неделимость, равноправность и различимость</u>. <u>Неделимость</u> элемента означает, что элемент является мельчайшей неделимой частью множества. Если Вы, например, распилите автомобиль пополам, то вряд ли кто-то назовёт полученные куски автомобилем, поскольку потеряны его главные качества. <u>Равноправность</u> элемента означает, что в рамках признака или свойства, выделяющего рассматриваемое нами множество, элементы этого множества равноправны между собой, ни один не лучше и не хуже другого, а для того, чтобы как-то выделять те или иные элементы среди других, необходимо рассматривать другие свойства элементов. Например, если Вы рассматриваете книги на полке, то с точки зрения свойства книги находиться на полке все книги между собой равноправны. Если же Вы захотите их различать между собой, то Вы неизбежно должны будете привлечь для этого какое-то свойство книги, то ли фамилию автора, то ли толщину, то ли цвет обложки, то ли какой-то другой признак или свойство. <u>Различимость</u> элемента означает, что для любого заданного элемента рассматриваемого Вами множества среди свойств элементов, которыми Вы располагаете, имеется такое, которое выделит этот заданный элемент в одноэлементное множество, т.е. выделит этот элемент среди других. Например, название книги почти наверняка выделит её среди других, если же нет, то мы можем привлечь для этого другие свойства, например, место на полке. Множества, элементы и свойства принято обозначать буквами (чаще всего латинскими и греческими). Принадлежность элемента a множеству M принято обозначать так: $a \in M$ или $M \ni a$. Если каждый элемент множества N является элементом множества M, то принято называть множество N <u>подмножеством</u> множества M и обозначать это так: $N \subseteq M$ или $M \supseteq N$.

Свойства вещей, предметов, людей и т.д., которые используются нами для объединения их во множества обычно не точны. Например, свойство кошки быть пятнистой очень приблизительно, и каждый сам для себя решает, например, является ли пятнистой белая кошка с двумя маленькими чёрными пятнами, кроме того, здесь к тому же требуется какое-то время для решения. Более точным является свойство автомобиля быть двухдверным, хотя и тут возможны ситуации не вполне определённые. Если, например, владелец трёхдверного авто, потерявшего в аварии дверь, будет катать Вас в холодную погоду, то Вы вряд ли согласитесь назвать такой автомобиль трёхдверным, если вообще согласитесь считать это транспортное средство автомобилем. Ещё более точно свойство делимости нацело. Пусть, например, во множестве натуральных чисел от одного до миллиарда выделено подмножество чисел, делящихся на девять, с помощью свойства «остаток от деления данного числа на девять равен нулю». Если Вам задано число, то проверка этого свойства, во-первых, займёт какое-то время, а во-вторых, может быть не точна. Так вот, в математике абстрагируются от неточности свойств и их проверки и предполагают, что <u>все свойства абсолютно точны и моментально проверяемы.</u> Можно понимать последнюю фразу следующим образом. Будем вначале считать все рассматриваемые множества конечными, проверку любого элемента на наличие или отсутствие какого-либо свойства почти достоверной и такой, что ошибками можно пренебречь, а время проверки как одного элемента, так и любого подмножества элементов пренебрежимо малым. Тогда можно приблизительно считать, что все свойства точны и моментально проверяемы. Так вот, в математических рассуждениях предполагают, что ошибок в проверке нет и время проверки нулевое. Итак, в математике всегда конечное подмножество во множестве выделяется точно и сразу[1]. Можно сказать, что математика — это точная наука в том смысле, что она учит точно формулировать свою мысль, поскольку неточно сформулированное свойство неточно задаёт подмножество с этим свойством, что ведёт к ошибкам в выводах.

Далее, почти во всех областях математики принято, что с бесконечными множествами можно обращаться по тем же правилам, что и с конечными. Эта точка зрения, которую иногда называют наивной теорией множеств, сейчас оспаривается, но пока что остаётся главенствующей и в математических исследованиях, и в образовании. Везде ниже мы будем придерживаться этой точки зрения, а именно, рассматривая любое множество, мы будем оперировать ним как конечным множеством в смысле точности и моментальности проверяемых свойств и других высказываний.

Заметим, что при неточно заданном свойстве расширение набора элементов, на котором мы испытываем наличие или отсутствие этого свойства, приводит к ещё большей неточности. Например, распространение понятия двухдверный на ветхие постройки приводит к многозначности выводов, а увеличение множества проверяемых на делимость на девять чисел с миллиарда до триллиона приводит к усложнению расчетов и увеличению возможности ошибки. Поэтому часто человек интуитивно стремится ограничить проверку того или иного свойства некоторым множеством элементов, за которое он старается не выходить в процессе такой проверки. Например, следовало бы исключить из числа автомобилей корпуса, находящиеся на свалке, и т.п. Математическим выражением этого интуитивного стремления является понятие универсального множества, понимаемого как некоторое (возможно, очень широкое) множество, за пределы которого мы заведомо не выйдем в своих рассмотрениях. Как правило, в каждом математическом рассмотрении есть некоторое универсальное множество, которое, однако, редко указывают, подразумевая, что в него входят все рассматриваемые элементы. Исключениями являются работы по противоречиям в математике, которые и возникают, если рассматривать слишком широкие множества, такие как множество всех множеств, множество всех групп и т.п. Антиподом понятию универсального множества является понятие пустого множества, которым называется любое множество, не содержащее ни одного элемента универсального множества. При этом пустое множество может содержать какие-то другие элементы, например, пустое множество яблок может содержать груши или карандаши.[2] Чтобы не усложнять изложение, принято, однако, считать, что пустое множество одно и обозначать его символом $\varnothing$, понимая его как множество, не содержащее ни одного элемента. При этом полагается, что в каждом непустом множестве имеется хотя бы один элемент. Универсальное множество будем обозначать буквой U.

Поскольку любые два элемента можно различить, то можно ввести понятие равенства двух элементов и понимать отношение $x = y$ как идентичность, совпадение этих элементов. Введём понятие равенства двух множеств (т.е. подмножеств универсального множества) M и N. Именно, $M = N$ означает, что $M \subseteq N$ и $M \supseteq N$. Введём также понятие декартового произведения $M \times N$ множеств M и N как множество всех пар (m,n), где $m \in M$, $n \in N$ и понятие отображения $f\colon M \to N$ из множества M в множество N как такого подмножества f в $M \times N$, что, если $(m,n_1) \in f$ и $(m,n_2) \in f$, то $n_1 = n_2$.

---

[1] Это так и в тех областях математики, которые используют такие понятия, как вероятность события, нечёткие или случайные множества, многозначная истинность высказывания и т.п. В этих областях такого типа понятия являются результатом некоторых конструкций, построенных на базе обычной математики и логики, т.е. используя те же свойства точности и моментальности проверок.

[2] Сравните с высказыванием немецкого философа Гегеля: «Ничто некоторого нечто есть некоторое определённое ничто».

3. ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Высказывания, применяемые нами в быту, верные, неверные или приблизительно верные могут нести в себе много различных оттенков: смысловых или эмоциональных, ситуационных или общих, объективных или субъективных. В математике высказывания могут быть только двух сортов: истинные и ложные[1]. Это связано с жизненно важной необходимостью иметь и использовать абсолютно непреложные факты, которые не вызывают сомнений ни у кого. Всякие же сомнения в математике разрешаются доказательством, основанным на принятых и проверенных правилах логического вывода, когда новый или сомнительный факт выводится из известных и несомненных. Часто встречаются и применяются высказывания, которые содержат некоторые произвольные объекты из каких-то множеств, это т.н. высказывательные формы или предикаты. Например, в арифметике высказывание «если натуральное число делится нацело на 8, то оно делится нацело на 2» истинно всегда, а высказывание «натуральное число x делится нацело на 8» и его истинность зависят от переменной x. Чтобы конструировать новые высказывания из имеющихся, нужны способы для этого. Каждый разговорный язык имеет свои богатые языковые средства для выражения мыслей, чувств и т.п., но в любом языке имеются возможности создания новых высказываний. Например, имеются отрицание «не» и связывающие слова «и», «или», «влечёт», «эквивалентно», которые можно использовать и которые используются для этого в математике. Они получили здесь свои названия и обозначения: <u>отрицание</u> $\rceil$ (или $\overline{}$) для «не», <u>конъюнкция</u> $\wedge$ (или &) для «и», <u>дизъюнкция</u> $\vee$ для «или», <u>импликация</u> $\Rightarrow$ для «влечёт», <u>эквивалентность</u> или <u>равносильность</u> $\Leftrightarrow$ для «эквивалентно». Т.о., если мы имеем два высказывания A и B, то можно построить высказывания $\rceil A$ ($\overline{A}$) «не A», $A \wedge B$ (A & B) «A и B», $A \vee B$ «A или B», $A \Rightarrow B$ «A влечёт B», $A \Leftrightarrow B$ « A эквивалентно B». При этом считается, что высказывание $\rceil A$ ($\overline{A}$) справедливо (истинно) тогда и только тогда, когда высказывание A несправедливо (ложно), высказывание $A \wedge B$ справедливо (истинно) тогда и только тогда, когда справедливы и A , и B; высказывание $A \vee B$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливы или A, или B (или оба); высказывание $A \Rightarrow B$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо высказывание $\rceil A \wedge B$; высказывание $A \Leftrightarrow B$ справедливо тогда и только тогда, когда одновременно справедливы или несправедливы оба высказывания A и B. Если принять обозначения: 1 для истины и 0 для лжи, то например для конъюнкции $\wedge$ мы получим, что $1\wedge1=1$, $1\wedge0=0$, $0\wedge1=0$, $0\wedge0=0$. Эти соотношения легче запоминаются, если заполнить таблицу:

$\wedge$	**1**	**0**
1	**1**	**0**
0	**0**	**0**

Здесь значение истинности высказывания A стоит в левом столбце, а высказывания B в верхней строке, а на пересечении стоит истинность высказывания $A\vee B$. Для дизъюнкции мы получаем аналогичные соотношения: $1\vee 1= 1$, $1\vee 0 =1$, $0\vee 1 = 1$, $0\vee 0 = 0$; для импликации: $1\Rightarrow1=1$, $1\Rightarrow 0=0$, $0\Rightarrow1=1$, $0\Rightarrow 0=1$; для эквивалентности: $1\Leftrightarrow1=1$, $1\Leftrightarrow0=0$, $0\Leftrightarrow1=0$, $0\Leftrightarrow0=1$; для отрицания: $\rceil 0=1$, $\rceil 1=0$. Эти соотношения тоже легче запомнить с помощью таблиц:

[1] Исключение являются научные работы, изучающие и применяющие т.н. многозначную логику, где истинность высказывания может иметь три, четыре, n или бесконечно много значений.

A	$\rceil$A
1	0
0	1

$\vee$	1	0
1	1	1
0	1	0

$\Rightarrow$	1	0
1	1	0
0	1	1

$\Leftrightarrow$	1	0
1	1	0
0	0	1

Эти таблицы называются таблицами истинности. Знаки $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ называются логическими знаками или логическими связками. Высказывание, сконструированное из двух, трёх и т.д. заданных высказываний с помощью логических знаков и скобок, называется логической формулой. Например, $(A\wedge B)\Leftrightarrow\rceil(\rceil A\vee\rceil B)$, $(A\vee B)\Leftrightarrow\rceil(\rceil A\wedge\rceil B)$, $(A\vee B)\Leftrightarrow(B\vee A)$, $((A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A))\Leftrightarrow(A\Leftrightarrow B)$, $(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\rceil A\vee B)$, $((A\vee B)\vee C)\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$ — логические формулы. Высказывание, значение которого истинно при любых значениях входящих в него букв, называется тавтологичным или (тождественно) истинным. Два высказывания A и B называются равносильными или эквивалентными, если высказывание $A\Leftrightarrow B$ тавтологично. Ясно, что любые два истинные высказывания равносильны. Также равносильны любые два ложные высказывания.

В приведенном выше списке примеров все высказывания тавтологичны, что означает равносильность высказываний в соответствующих скобках. Доказательства истинности этих и других логических формул можно провести на основании таблиц истинности. Докажем, например, истинность высказывания $(A\wedge B)\Leftrightarrow\rceil(\rceil A\vee\rceil B)$. Если истинность A равна 1, и истинность B равна 1, то истинность $A\wedge B$ по таблице истинности равна 1, истинность $\rceil A$ равна 0, истинность $\rceil B$ равна 0, истинность $\rceil A\vee\rceil B$ по таблице равна 0, истинность $\rceil(\rceil A\vee\rceil B)$ равна 1, и, наконец, истинность $(A\wedge B)\Leftrightarrow\rceil(\rceil A\vee\rceil B)$ равна 1. Если же истинность A равна 1, а истинность B равна 0, то истинность $A\wedge B$ по таблице истинности равна 0, истинность $\rceil A$ равна 0, истинность $\rceil B$ равна 1, истинность $\rceil A\vee\rceil B$ по таблице равна 1, истинность $\rceil(\rceil A\vee\rceil B)$ равна 0, и, наконец, истинность $(A\wedge B)\Leftrightarrow\rceil(\rceil A\vee\rceil B)$ равна 1. Точно так же вычисляем истинности входящих формул и всей формулы в случае, когда истинность A равна 0, а истинность B равна 1, а также когда истинность A равна 0 и истинность B равна 0. Во всех случаях истинность $(A\wedge B)\Leftrightarrow\rceil(\rceil A\vee\rceil B)$ равна 1. По определению равносильности это означает, что высказывания $A\wedge B$ и $\rceil(\rceil A\vee\rceil B)$ равносильны. Точно также равносильны высказывания: $A\vee B$ и $\rceil(\rceil A\wedge\rceil B)$, $A\vee B$ и $B\vee A$, $((A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A))$ и $A\Leftrightarrow B$, $A\Rightarrow B$ и $\rceil A\vee B$. Равносильность последней пары, впрочем, следует из определения импликации. Истинные логические формулы можно получать из нескольких истинных аксиом с помощью нескольких правил, называемых правилами логического вывода, которые мы сейчас рассмотрим. В классическом исчислении высказываний[1] аксиомами являются следующие формулы:

1. $(A\Rightarrow(B\Rightarrow A))$,
2. $((A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\Rightarrow(B\Rightarrow C))\Rightarrow(A\Rightarrow C)))$,
3. $(A\Rightarrow(B\Rightarrow(A\wedge B)))$,

4а. $((A\wedge B)\Rightarrow A)$, 4б. $((A\wedge B)\Rightarrow B)$,

5а. $(A\Rightarrow(A\vee B))$, 5б. $(B\Rightarrow(A\vee B))$,

6. $((A\Rightarrow C)\Rightarrow((B\Rightarrow C)\Rightarrow((A\vee B)\Rightarrow C)))$,
7. $((A\Rightarrow B)\Rightarrow((A\Rightarrow\rceil B)\Rightarrow\rceil A))$,
8. $(\rceil\rceil A\Rightarrow A)$.

[1] Это – одна из возможных систем аксиом т.н. гильбертовского типа (см.[10]). Рассматриваются также системы аксиом т.н. генценского типа (см.[14]).

К этим аксиомам присоединяется правило логического вывода:

I. “ из A и ($A \Rightarrow B$) можно получить B ”.

На самом деле аксиомы 1 — 8 являются схемами аксиом, т.е. в каждую из них вместо букв *A,B,C* можно подставлять любые высказывания, образованные формативной конструкцией классического исчисления высказываний (см. ниже). По таблицам истинности можно проверить тавтологичность каждого из высказываний в списке 1-8.

Формативная конструкция (или, иначе, язык) классического исчисления высказываний состоит из :

1) алфавита, т.е. (потенциально бесконечного) набора букв, обозначающих высказывания;
2) логических знаков: одноместного $\rceil$ и двуместных $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
3) процесса построения всевозможных комбинаций из букв и логических знаков; точнее, вводится понятие формулы исчисления высказываний:

   а) каждая буква является формулой;

   б) если A и B – формулы, то $\rceil A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$ – формулы;

применяя теперь пункты а) и б) много раз, получим набор формул, точнее, формула – это то, что можно получить, применяя конечное число раз пункты а) и б).

Классическое исчисление высказываний состоит из формативной конструкции, аксиом 1–8 и правила вывода I.

Формула называется выводимой (или доказуемой), если её можно получить применением конечного числа аксиом и правила вывода. В частности, формулы 1–8 – выводимы. Справедлива следующая замечательная

Теорема 1. Для того, чтобы формула была выводима, необходимо и достаточно, чтобы она была тавтологична.

Необходимость здесь доказать не сложно, а более сложная достаточность была впервые доказана в 1921 году американским логиком Эмилем Постом.

4. ПРЕДИКАТЫ

Сейчас пора снова вспомнить о множествах. До сих пор в понятие высказывания мы не вкладывали какого-либо конкретного содержания. Ниже на основе понятия множества мы выделим некоторые элементарные высказывания и будем конструировать из них более сложные.

Будем придавать каждому свойству смысл высказывания об элементе, которое может быть истинным (значение 1) либо ложным (значение 0) в зависимости от того, какой элемент универсального множества рассматривается. В примере с библиотечными книгами рассмотрим фразу: «книга x имеет библиотечный штамп». Эта фраза после процедуры проверки конкретной книги x становится истиной, если проверенная книга имеет штамп, и ложью, если не имеет. Высказывание вида $A(x)$, принимающее на элементах некоторого множества значения истинности 1 (истина) и 0 (ложь), называют предикатом (высказывательной формой) размерности 1 или коротко свойством. Каждый предикат $A(x)$, заданный на всем универсальном множестве U, или на его подмножестве T, выделяет некоторое подмножество $N_A = \{x \in T \mid A(x)\}$ (читается так: множество таких элементов x из T, что высказывание $A(x)$ истинно) во множестве U. Такое же высказывание, но зависящее от двух элементов, принимающее значения истинности 1 и 0, $A(x, y)$ называют предикатом (высказывательной формой) размерности 2 или коротко отношением. Примером отношения является предикат $x = y$. Можно привести примеры предикатов (высказывательных форм) размерности 3,4,…,n и т.д. вида $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Любые предикаты A , B, C,... можно, очевидно, связать между собой логическими знаками и так получать новые предикаты.

Универсальное множество, как и любое непустое множество, состоит из неделимых, равноправных и различимых элементов. Каждый элемент $x \in U$, как отмечалось, должен быть отличим от других некоторым свойством, т.е. должно существовать свойство, истинное на x и ложное на любом элементе $y \neq x$ из множества U. Такое свойство принято называть <u>элементарным</u> (или <u>атомарным</u>, поскольку оно выделяет элемент x, неделимую часть, "атом" множества) и обозначать $x(y)$. Если теперь у нас есть два фиксированных элемента x_1 и x_2 универсального множества, то предикат $A = x_1(y) \vee x_2(y)$ порождает множество N_A, состоящее из двух элементов x_1 и x_2, и называемое объединением элементов x_1 и x_2 и обозначаемое $x_1 \cup x_2$. Аналогично, предикат $B = x_1(y) \vee x_2(y) \vee x_3(y)$ порождает множество N_B, состоящее из трёх элементов x_1, x_2 и x_3, называемое объединением элементов x_1, x_2 и x_3, и обозначаемое $x_1 \cup x_2 \cup x_3$, а предикат $C = x_1(y) \vee x_2(y) \vee ... \vee x_n(y)$ порождает множество N_C, состоящее из n элементов x_1, x_2 ,..., x_n, это объединение $x_1 \cup x_2 \cup ... \cup x_n$.

Пусть теперь универсальное множество U конечно. Тогда любое подмножество мы сможем (действуя мгновенно) получить объединением одноэлементных множеств, и любое подмножество выделяется свойством, являющимся дизъюнкцией элементарных свойств. С точки зрения множества U любые два свойства $A(x)$ и $B(x)$, выделяющие одно и то же подмножество N в множестве U эквивалентны. Мы объясним это тем, что для каждого $x \in U$ высказывания $A(x)$ и $B(x)$ одновременно истинны или ложны, т.е. они равносильны. Высказывание 1 (истина) выделяет всё множество U, а высказывание 0 (ложь) выделяет пустое множество $\varnothing$ этого множества. Определим теперь операции $\cup$, $\cap$, $\complement$, $\setminus$ над подмножествами A и B множества U по формулам:

$A \cup B = \{x \in U \mid A(x) \vee B(x) = 1\}$, $\quad A \cap B = \{x \in U \mid A(x) \wedge B(x) = 1\}$,

$A \setminus B = \{x \in U \mid \rceil(A(x) \Rightarrow B(x)) = 1\}$, $\quad \complement A = \{x \in U \mid \rceil A(x) = 1\}$.

Множество $A \cup B$ называется объединением множеств A и B, множество $A \cap B$ называется пересечением множеств A и B, множество $A \setminus B$ называется разностью множеств A и B, множество $\complement A$ называется дополнением множества A до множества U. Произведение или декартово произведение $A \times B$ множеств A и B определим предикатом размерности 2 $A(x) \wedge B(y)$, который является истинным на множестве тех пар (x,y) элементов из U, в которых $x \in A$, $y \in B$. Теперь из логической формулы для предикатов $(A(x) \vee B(y)) \Leftrightarrow (B(y) \vee A(x))$ получаем коммутативность объединения множеств: $(A \cup B) = (B \cup A)$, а из логической формулы для предикатов $(A(x) \vee B(y)) \vee C(z)) \Leftrightarrow (A(x) \vee (B(y) \vee C(z)))$ получаем ассоциативность объединения множеств $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Кванторы $\forall$ "для любого" и $\exists$ "существует такой, что" можно воспринимать как значки для сокращения речи, но в математической логике они имеют самостоятельный смысл. Если, например, $A(x)$ – предикат размерности 1, то по определению $S = \forall x \in B, A(x)$ – предикат размерности 0 или высказывание, истинное, если $A(x)$ истинно для любого $x \in B$, и ложное в противоположном случае, т.е. если существует такой элемент $x \in B$, что $A(x)$ ложно. Аналогично, если $B(x,y)$ – предикат размерности 2, то $S = \forall x \in C, \forall y \in D, B(x,y)$ – предикат размерности 0 или высказывание, истинное, когда $B(x,y)$ истинно для любого $x \in C$, $y \in D$, а $S(y) = \forall x \in C, B(x,y)$ – предикат размерности 1, истинный на тех $y \in U$, на которых $B(x,y)$ истинно при всех $x \in C$. Похожими являются следующие определения: $T = \exists x \in B, A(x)$ – предикат размерности 0, истинный, если $A(x)$ истинно хотя бы для одного $x \in B$, и ложный в противоположном случае, т.е. если для всех элементов $x \in B$ $A(x)$ ложно; $S = \exists x \in C, \exists y \in D, B(x,y)$ – предикат размерности 0 или высказывание, истинное, если $B(x,y)$ истинно хотя бы для одной пары $x \in C$, $y \in D$, а $S(y) = \exists x \in C, B(x,y)$ – предикат размерности 1, истинный на тех $y \in U$, на которых $B(x,y)$ истинно хотя бы для одного $x \in C$, $S = \exists x \in C, \forall y \in D, B(x,y)$ – предикат размерности 0 или высказывание, истинное, если $B(x,y)$ истинно хотя бы для одного $x \in C$ и всех $y \in D$ и т.п. При этом зоной действия квантора $\forall x$ или $\exists x$ считается предикат, следующий за этим квантором, и только он; будем также считать, что этот предикат обязательно содержит x, в противном случае знакосочетание с квантором типа $\forall x \in C$,или $\exists y \in D$, следует из предиката удалить. Имеют место формулы

$$\rceil(\forall x \in C, B(x,y)) = \exists x \in C, \rceil(B(x,y)), \qquad \rceil(\exists x \in C, B(x,y)) = \forall x \in C, \rceil(B(x,y)),$$

означающие, что знак отрицания можно пронести через квантор, изменяя его на противоположный, т.е. $\forall$ на $\exists$ и $\exists$ на $\forall$. Буквы $x, y, \ldots$, обозначающие элементы множеств, принято называть <u>предметными</u> <u>переменными</u>, при этом вхождение предметной переменной x в формулу называется связанным, если эта предметная переменная в этом вхождении стоит вместе с квантором: $\forall x$ или $\exists x$; вхождение предметной переменной x в формулу называется свободным, если эта предметная переменная в этом вхождении не стоит вместе с квантором. Предметные переменные удобно обозначать буквами из одного списка букв, например, как у нас, малыми латинскими, а предикаты – буквами из другого списка, например, большими латинскими.

Рассмотрим также всевозможные отображения некоторого множества M в себя, то есть отображений $M \to M$, а также всевозможные отображения из множества пар $M \times M \to M$, троек $M \times M \times M \to M$ и т.д., которые будем называть функциями. Функции удобно обозначать буквами из третьего списка, например, как ниже, греческими. Этими буквами мы будем обозначать функциональные переменные, причём функциональная переменная размерности два будет обозначать функцию двух переменных, а функциональная переменная размерности три будет обозначать функцию трёх переменных и т.п., функциональная переменная размерности ноль будет обозначать постоянную, т.е. фиксированный элемент множества M.

Так же как и исчисление высказываний строится исчисление предикатов.

Формативная конструкция (или, иначе, язык) классического исчисления предикатов[1] состоит из :

1) алфавита, т.е. трёх (потенциально бесконечных) списков букв, обозначающих предметные переменные, предикаты и функциональные переменные соответственно (каждая из предикатных и функциональных переменных снабжена информацией о своей размерности, причём для предикатных переменных наименьшая размерность 1, а для функциональных – 0);
2) логических знаков: одноместного $\rceil$ и двуместных $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ для предикатов; $\forall$ и $\exists$ для пары: предметная переменная и предикат.
3) процесса построения всевозможных комбинаций из букв и логических знаков;

точнее, вводятся понятия терма и формулы исчисления предикатов :

терм:

а) всякая предметная переменная и всякая функциональная переменная размерности ноль есть терм,

б) если α – функциональная переменная размерности n, а $T_1, T_2,\ldots, T_n$ – термы, то $\alpha(T_1, T_2,\ldots, T_n)$ есть терм;

атомарная (элементарная) формула:

если P – предикатная переменная размерности k, а $T_1, T_2,\ldots, T_k$ – термы, то $P(T_1, T_2,\ldots, T_n)$ есть атомарная формула;

формула:

а) всякая атомарная формула есть формула;

б) если A и B – формулы, а x – предметная переменная, то $\rceil A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $\forall xA$ и $\exists xA$ – формулы;

применяя теперь пункты а) и б) конечное число раз, получим набор термов и формул.

Классическое исчисление предикатов[1] (с функциональными знаками) состоит из формативной конструкции, аксиом 1–8 и правила вывода I из исчисления высказываний (см. раздел 2) и к ним добавляются аксиомы

9. $\forall xA \Rightarrow [A]^x_T$,

10. $[A]^x_T \Rightarrow \exists xA$,

где через $[A]^x_T$ обозначен результат подстановки произвольного терма T в предикат A вместо предметной переменной x, а также ещё два правила вывода

II. **“ из $(D \Rightarrow A)$ можно получить $(D \Rightarrow \forall x\, A)$ ”.**

III. **“ из $(A \Rightarrow D)$ можно получить $(\exists x\, A \Rightarrow D)$ ”.**

Формула называется выводимой (или доказуемой или, наконец, теоремой), если её можно получить применением конечного числа аксиом 1-10 и правил вывода I,II,III при произвольных значениях свободных переменных из множества M. Формула называется общезначимой на множестве M, если для любых значений предикатных переменных и для

---

[1] Точнее сказать: классическое исчисление предикатов первого порядка (см. [10]).

любых значений из множества M свободно входящих в неё предметных и функциональных переменных формула принимает истинное значение, и просто общезначимой, если она общезначима на универсальном множестве. В классическом исчислении предикатов справедлива следующая теорема, аналогичная теореме Поста.

Теорема 2. Для того, чтобы формула была выводима, необходимо и достаточно, чтобы она была общезначима.

Как и в теореме 1, необходимость здесь доказать не сложно, а более сложная достаточность была доказана в 1930 году венским (впоследствии принстонским, США) логиком Куртом Гёделем.

Многочисленные логические исчисления получаются видоизменением построенных выше исчислений (высказываний и предикатов). Так, добавлением символа “=” вместе с аксиомами

10. $(T = T)$,
11. $((T = U) \Rightarrow ([A]^{x}_{T} = [A]^{x}_{U})$,

где A,T,U – произвольны, T,U – свободны для x в A, приводят к классическому исчислению предикатов (с функциональными знаками) с равенствами.

Отметим, что выбрасывание из этой схемы (классического исчисления предикатов с функциональными знаками) функциональных переменных приводит к чистому (или узкому) исчислению предикатов, выбрасывания из всех вышеупомянутых исчислений аксиомы 8 (свойства исключённого третьего) дают т.н. минимальные исчисления, а замены аксиомы 8 на аксиому

8′ $\quad (\boldsymbol{A} \Rightarrow (\neg \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}))$

дают т.н. интуиционистские (или конструктивные) исчисления, также активно изучаемые в математической логике и её приложениях.

5. ТЕОРИИ

Любая теория начинает развиваться с некоторых интуитивных представлений о предмете своих исследований. После того, как выделены основные понятия и основные свойства, перечислены основные объекты исследования и установлены основные связи, возникает естественное стремление выделить главные понятия, объекты и связи с тем, чтобы все остальные были бы основаны на выделенных, из них вытекали. Аксиоматизация первоначально интуитивных математических теорий является выражением этого естественного стремления. Примерами этого могут служить геометрия Евклида, небесная механика Ньютона, арифметика Пеано, теория вероятностей Колмогорова, большинство областей алгебры, топологии и функционального анализа, лагранжев формализм механики и теории поля и др.

Аксиоматическая теория понимается сейчас как два множества высказываний, первое из которых определяет предметную область теории и задаётся формативной конструкцией, а второе, подмножество первого, – истинные в ней или доказуемые высказывания, и вопрос об истинности высказывания (т.е. вопрос о принадлежности высказывания из первого множества второму) решается указанием исходных истинных высказываний (аксиом) и правил вывода новых истинных высказываний из уже имеющихся. В наиболее рафинированном виде аксиоматический подход выражен в форме так называемого логико-математического исчисления. Существенными чертами, отличающими логико-математического исчисления от аксиоматических теорий традиционной математики, являются: 1) выявление используемых теорией логических средств путём формулирования всех аксиом и правил вывода; 2) переход от разговорного языка к точному формальному языку. Обычно логико-математическое исчисление строится на базе некоторого логического исчисления, основные из которых мы рассмотрели выше. Язык логико-математического исчисления получается из языка такого логического исчисления добавлением символов специальных функций и предикатов (и, быть может, удалением некоторых предикатных элементов и функциональных переменных). Перечень аксиом логико-математического исчисления получается путём добавления к перечню аксиом базового логического исчисления некоторых аксиом, описывающих свойства добавленных функций и предикатов. Приведём примеры логико-математических исчислений.

Теория групп. Язык (первых понятий) теории групп получается из языка классического исчисления предикатов с равенством, к нему добавляются функциональные символы $\cdot$ (умножение) и inv(обращение), а также константа (т.е. выделенный терм) e (единица), а выбрасываются все остальные предикатные символы, кроме равенства. Дополнительная аксиома

$$\forall x \forall y \forall z\, ((e \cdot x = x) \wedge (\mathrm{inv}(x) \cdot x = e) \wedge ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)))$$

выражает то, что e – единица группы, $\mathrm{inv}(x)$ – элемент, обратный к x, и умножение ассоциативно. Заметим, что развитие теории групп происходит при дополнительных предположениях (которые можно считать условиями выводимости высказывания, а можно считать дополнительными аксиомами, характеризующими теорию частного вида групп) на группу: изучаются абелевы группы, простые группы, разрешимые группы, нётеровы группы и др.

Классическая формальная арифметика. Язык первых понятий теории (натуральных) чисел получается из языка классического исчисления предикатов с равенством, к нему добавляются функциональные символы: $+$ (сложение), $\cdot$ (умножение) и $'$ (прибавление 1), а также константа 0. К аксиомам классического исчисления предикатов с равенством добавляются аксиомы Пеано (с не записанными кванторами $\forall a$ и $\forall b$):

1) $a'=b' \Rightarrow a=b$,
2) $\urcorner(a' = 0)$,
3) $(a = b \wedge b = c) \Rightarrow b=c$,
4) $a=b \Rightarrow a'=b'$,
5) $a + 0 = a$,
6) $a + b' = (a + b)'$,
7) $a \cdot 0 = 0$,
8) $a \cdot b' = (a \cdot b) + a$

и аксиома индукции

9) $(A(0) \wedge \forall x\, (A(x) \Rightarrow A(x'))) \Rightarrow A(x)$,

где $A(x)$ – произвольная формула.

Средства классической формальной арифметики оказываются достаточными для вывода теорем, устанавливаемых в стандартных курсах теории чисел, более того, в настоящее время, по-видимому, не известно ни одной содержательной теоретико-числовой теоремы, доказываемой без привлечения средств анализа, которая не была бы выводима в классической формальной арифметике.

Основания геометрии – это название для первых понятий и аксиом геометрии. Напомним, что школьный курс геометрии строится на основе аксиоматики, данной Евклидом, существенно уточнённой Гильбертом и переработанной с методическими целями. Одной из распространённых схем оснований геометрии, в которой заложена возможность обобщения и перевода на язык алгебры, является система аксиом, предложенная в 1916 году немецким математиком Германом Вейлем (заметим, что во многих странах, например во Франции, геометрия в школе изучается на основе похожих систем аксиом). В этой системе трёхмерное пространство определяется как множество, состоящее из элементов двух родов – точек и векторов, удовлетворяющих следующим четырём группам аксиом.

I группа – соотношения между точками и векторами: I_1. Существует хотя бы одна точка. I_2. Каждой упорядоченной паре точек A и B поставлен в соответствие единственный вектор AB. I_3. Для каждой точки A и каждого вектора a существует единственная точка B со свойством $a = AB$. I_4. Если $AB=CD$, то $AC=BD$.

На основе этой группы аксиом очевидным образом определяется сумма векторов, которая является ассоциативной и коммутативной, определяется нуль-вектор и противоположный вектор. Векторы образуют абелеву группу.

II группа – аксиомы умножения вектора на число. II_1. Каждому вектору a и каждому вещественному k сопоставляется вектор ka, называемый произведением вектора на скаляр. II_2. $1a=a$. II_3. $(k_1+k_2)\,a=k_1\,a+k_2\,a$. II_4. $k\,(a_1+a_2)=ka_1+ka_2$. II_5. $(k_1\,k_2)\,a=k_1\,(k_2\,a)$. Теперь обычным образом строится линейная алгебра.

III группа – аксиома размерности: существует линейно независимая система из трёх векторов и любые четыре вектора – линейно зависимы.

IV группа – существование и обычные четыре свойства скалярного произведения векторов. Вводится понятие расстояния как нормы вектора, угол между векторами, понятия отрезка, прямой, плоскости и т.д.

Эта система аксиом допускает обобщения по размерности, в эту схему включаются эллиптические и гиперболические пространства, проективная и другие геометрии [19].

Формальный математический анализ. Так называют формальные аксиоматические теории, специально предназначенные для формализации (точного описания доказательств) математического анализа. Наиболее распространённым вариантом является логико-математическое исчисление, построенное Давидом Гильбертом и Паулем Бернайсом (1934 г.), которое можно описать следующим образом. К языку классической формальной арифметики добавляется новый вид атомарных формул: ($t \in X$) " t принадлежит X ", аксиомы классической формальной арифметики понимаются как относящиеся к расширенному понятию формулы, наконец, добавляется новая аксиома свёртывания

$$\exists X\ \forall y\ (\,y \in X \Leftrightarrow A(y)),$$

где $A(y)$ – формула рассматриваемого языка, не содержащая свободно X, y – переменная для натуральных чисел. Отметим, что в теории Гильберта – Бернайса речь идёт лишь о натуральных числах и о множествах натуральных чисел. Эта теория достаточна для формализации математического анализа. Особенностью этой теории является возможность использовать кванторы по множествам, отражённая в аксиоме свёртывания (т.е. возможность использовать и квантор всеобщности $\forall$, раз уж имеется квантор существования $\exists$). Таким образом, при выяснении принадлежности числа y определённому в аксиоме множеству X необходимо использовать наличие всех множеств натуральных чисел, в том числе и определяемое множество X. Можно сказать, что аксиома свёртывания выражает необходимость существования всех подмножеств множества натуральных чисел одновременно. Эта особенность теории называется непредикативностью. Непредикативность является несомненным несовершенством теории и были построены другие теории, не имеющие этого свойства. Таковы, например, теории разветвлённого анализа, восходящие к Герману Вейлю, в которых, однако, появляются другие трудности, например, непредикативность определения наибольшей нижней грани, и т.п.

Аксиоматическая теория множеств будет рассмотрена ниже.

Рассмотрим некоторые наиболее важные свойства теорий. Под теорией мы будем ниже понимать логико-математическое исчисление. Свойство непротиворечивости теории состоит в том, что не существует формулы такой, что она сама и её отрицание обе выводимы в этой теории. Можно показать, что непротиворечивость теории эквивалентна тому, что не каждая формула выводима в ней [10]. В связи с этим свойством введём понятие модели теории. Приписывание значений первичным терминам теории называется интерпретацией этой теории, и, если совокупность объектов, выбранных в качестве значений первичных терминов теории, т.е. в качестве интерпретации, удовлетворяет аксиомам теории, то она называется моделью этой теории. Поясним сказанное примерами. Возьмём, например теорию групп. Любая конкретная группа является моделью теории групп, поскольку в ней интерпретированы термы и предикаты и выполнены аксиомы теории. В частности, группа **Z** целых чисел является моделью теории групп, группа 1, состоящая только из числа 1 также является моделью теории групп. Для любого множества M группой является множество его подмножеств с симметрической разностью в качестве умножения и пустым множеством в качестве единицы, тем самым это множество подмножеств является моделью теории групп. Моделью классической формальной арифметики является множество $\mathbf{Z}_+$ неотрицательных целых чисел с обычными сложением, умножением и прибавлением единицы. Другой моделью этой же теории является, например, прогрессия $1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$ с некоторым $q>0$, где 0 интерпретируется единицей, $1(=0')$ интерпретируется как число q, $a+b$ – как q^{n+m}, если a интерпретируется как число q^n, а b интерпретируется как число q^m , $a \cdot b$ – как q^{nm}, наконец, a' интерпретируется как q^{n+1} и все аксиомы выполнены. Очевидно, что каждая выводимая формула теории истинна в модели, поэтому, если в теории выводима любая формула, то это же есть и в модели. Поэтому для доказательства непротиворечивости теории достаточно указать модель и невыводимую формулу в ней. Например, теория групп непротиворечива, поскольку непротиворечива модель, представленная группой 1. Непротиворечивость евклидова геометрии сводится к непротиворечивости арифметики посредством стандартной числовой интерпретацией: точкам отвечают тройки чисел и т.д. Таким образом, построение непротиворечивой модели – это способ доказать непротиворечивость теории. Другой способ доказательства непротиворечивость теории, называемый метаматематическим, состоит в том, что утверждение о непротиворечивости теории рассматривается как высказывание о доказательствах, возможных в этой системе. Теория, объектами которой являются доказательства, называется теорией доказательств или метаматематикой. Примером применения этого способа может служить предложенное немецким логиком Герхардом Генценом доказательство непротиворечивости классической формальной арифметики [14].

Свойство полноты теории состоит в том, что в ней выводима каждая формула, не содержащая свободных переменных, либо её отрицание. Например, классическое исчисление предикатов полно в силу теоремы Гёделя (теорема 2), которая потому и называется теоремой Гёделя о полноте. Классическое исчисление высказываний полно в силу теоремы Поста (теорема 1). Здесь следует отметить, что, хотя в этой теории нет кванторов, их можно ввести, применяя их к высказывательным буквам и добавив аксиомы 9 и 10, если, например, мы не хотим менять определение полноты. Тогда каждая формула, не содержащая свободных высказывательных переменных, либо её отрицание будет тавтологичным, и, значит, выводимой. Классическая формальная арифметика, хотя она и получена присоединением к классическому исчислению предикатов с равенствами аксиом *1) — 9)*, уже не полна, что следует из следующей теоремы.

Теорема 3 (первая теорема Гёделя о неполноте). В любой формальной системе (теории), содержащей минимум арифметики (знаки $+$, $\cdot$ и кванторы $\exists$ и $\forall$ с обычными правилами обращения с ними), найдётся такая формула A, что ни A, ни её отрицание $\rceil A$ не являются выводимыми в этой теории.

Вторая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что в качестве A можно взять утверждение о непротиворечивости рассматриваемой теории. Эта теорема может быть сформулирована также и так.

Теорема 4 (Вторая теорема Гёделя о неполноте). В любой непротиворечивой формальной системе (теории), содержащей минимум арифметики, непротиворечивость не может быть доказана средствами самой теории.

В частности, отсюда следует, что теорема Генцена привлекает средства, выходящие за рамки классического исчисления предикатов и арифметики. Конечно, формулировки обоих теорем Гёделя нуждаются в уточнениях и объяснении, которые читатель сможет найти, например, в книгах [10],[11].

Отметим ещё понятие сравнения силы теории. Говорят, что теория T сильнее теории U, если непротиворечивость теории U доказана в теории T.

6. АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Теория множеств уже в самом начале своего развития натолкнулась на парадоксы, что вызвало широкую дискуссию и способствовало коренному пересмотру логико-математических принципов. Аксиоматическое направление в теории множеств можно рассматривать как инструмент более детального изучения сложившегося положения. На этом пути было создано несколько аксиоматических теорий, некоторые и наиболее известные из них мы рассмотрим ниже.

Аксиоматическая теория множеств, как и любая другая аксиоматическая теория, начинается с <u>формативной конструкции</u> (<u>языка</u>), состоящей из следующих составных частей.

I. Символы языка:

1) переменные $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$, которые играют роль общих имён множеств,
2) предикатные символы $\in$ (знак принадлежности) и $=$ (знак равенства),
3) оператор дескрипции ι (означающий “такой объект, что…”),
4) логические знаки $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ и кванторы $\forall$, $\exists$,
5) скобки (,), { , }.

Выражения языка делятся на термы и формулы. Термы являются именами множеств, а формулы выражают суждения. Термы и формулы образуются по следующим правилам.

II. Переменная x есть терм, если A – формула и x – переменная, то ιxA суть терм.

III. Если τ и σ – переменные или термы, то $\tau \in \sigma$ и $\tau = \sigma$ суть формулы.

IV. Если A и B – формулы и x – переменная, то $\rceil A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $\forall xA$, $\exists xA$ суть формулы.

Применяя теперь пункты II, III и IV много раз, получим набор термов и формул, точнее, терм (формула) – это то, что можно получить, применяя конечное число раз пункты II, III и IV. (Отметим, однако, что в нижеприведенных теориях множеств класс допустимых предикатов нуждается в уточнениях, см. [1]).

Например, формула $\forall x\ (x \in y \Rightarrow x \in z)$ выражает суждение “y есть подмножество x”, её естественно обозначить как $y \subseteq z$, а терм $\iota w \forall y (y \in w \Leftrightarrow y \subseteq z)$ является именем множества всех подмножеств множества z, в привычной символике его обозначают Pz или 2^z. Пусть знак $\rightleftarrows$ означает “стоящее слева есть обозначение для стоящего справа”. Приведём формализации некоторых привычных обозначений теории множеств, которые к тому же будут использованы ниже.

– Пустое множество: $\varnothing \rightleftarrows \iota x\ \forall y\ \rceil y \in x$.

– Множество таких x, что $A(x)$: $\{x \mid A(x)\} \rightleftarrows \iota z \forall x (x \in z \Leftrightarrow A(x))$, где z не входит свободно в $A(x)$.

– Неупорядоченная пара x и y: $\{x,y\} \rightleftarrows \{z \mid z=x \vee z=y\}$.

– Одноэлементное множество из x: $\{x\} \rightleftarrows \{x,x\}$.

– Упорядоченная пара x и y: $<x,y> \rightleftarrows \{\{x\},\{x,y\}\}$.

– Объединение x и y: $x \cup y \rightleftarrows \{z \mid z \in x \vee z \in y\}$.

– Пересечение x и y: $x \cap y \rightleftarrows \{z \mid z \in x \wedge z \in y\}$.

– Объединение всех элементов x : $\cup x \rightleftarrows \{z \mid \exists v\ (z \in v \wedge v \in x\}$.

– Декартово произведение x и y: $x \times y \rightleftarrows \{z \mid \exists u\ \exists v\ (z=<x,y> \wedge u \in x \wedge v \in y\}$.

– w есть функция: $\mathrm{Func}(w) \rightleftarrows \exists v\ (\ w \subseteq v \times v) \wedge \forall u \forall v_1 \forall v_2\ (<u, v_1> \in w \wedge <u, v_2> \in w \Rightarrow v_1 = v_2)$.

– Значение функции w на элементе x: $w(x) \rightleftarrows \iota y <x,y> \in w$.

– x есть стандартное бесконечное множество (в обычной символике N): $\mathrm{Inf}\ (x) \rightleftarrows \varnothing \in z \wedge \forall u\ (u \in z \Rightarrow u\ \cup \{u\} \in z)$.

Большинство аксиоматических теорий множеств можно описать с помощью приведенного выше языка, записывая лишь систему аксиом той или иной теории.

Поэтому для аксиоматических теорий множеств принято название “система”. Наиболее известными являются:

— различные теории типов, начиная с теории типов Рассела, некоторое представление об этой теории дают её обрезанные варианты T_n , см. ниже.

—система Z, построенная немецким математиком Эрнстом Цермело (Zermelo) в 1908 году,

—система ZF Цермело—Френкеля, состоящая из системы Z с добавленной аксиомой Френкеля (A. Fraenkel, 1922), наиболее популярная и цитируемая,

—система NBZ Неймана—Гёделя—Бернайса (J.von Neumann—K.Gödel—P.Bernays, 1925)

—система NF Куайна (Quine 1937).

Об этих и других системах можно прочитать в книгах [1],[6],[12]. Ниже мы рассмотрим системы Z, ZF и NBZ, но начнём с формализации наивной теории множеств.

Наивная теория множеств

Следующая аксиоматическая теория *A* наиболее полно отражает принципы наивной теории множеств.

Аксиомы теории *A*:

A1. Аксиома объёмности: $\forall x(x\in y \Leftrightarrow x\in z) \Rightarrow y= z$

(если множества содержат одни и те же элементы, то они равны).

A2. Аксиома свёртывания: $\exists y\ \forall x\ (x\in y \Leftrightarrow A)$, где A – произвольная формула, не содержащая y в качестве параметра (существует множество y, содержащее те и только те элементы x, для которых A).

Теория *A* – противоречива. Так, если в *A2* в качестве A взять формулу $\rceil x\in x$, то из формулы $\forall x(x\in y \Leftrightarrow \rceil x\in x)$ легко выводится $y\in y \Leftrightarrow \rceil y\in y$ что противоречиво.

Система ZF Цермело—Френкеля

Система Z Цермело (см.[1],[6],[12],[15]) включает следующие аксиомы.

Z1. Аксиома объёмности *A1.*

Z2. Аксиома пары: $\exists u\ \forall z\ (z\in u \Leftrightarrow z=x \vee z=y)$

(существует множество $\{x,y\}$).

Z3. Аксиома суммы: $\exists y\ \forall x\ (x\in y \Leftrightarrow \exists t\ (t\in z \wedge x\in t))$

(существует множество $\cup z\}$).

Z4. Аксиома степени: $\exists y\ \forall x\ (x\in y \Leftrightarrow x\subseteq z)$

(существует множество Pz или в других обозначениях 2^z).

Z5. Аксиома выделения: $\exists y\ \forall x\ (x\in y \Leftrightarrow x\in z \wedge A(x))$

(существует подмножество z, состоящее из тех элементов x, для которых имеет место $A(x)$).

Аксиомы Z2 – Z5 являются примерами аксиом свёртывания.

Z6. Аксиома бесконечности: $\exists z\ \mathrm{Inf}\ (x)$

(существует бесконечное множество).

Z7. Аксиома выбора: $\forall x\exists w\ (\mathrm{Func}(w) \wedge\forall x(x\in z \wedge\rceil x=\varnothing \Rightarrow w(x) \in x))$

(для всякого множества z существует функция w, выбирающая из каждого непустого элемента x множества z единственный элемент $w(x) \in x$). Аксиома выбора, вероятно, самая известная среди аксиом и самая цитируемая. Это связано с тем, что она эквивалентна (при выполнении остальных аксиом) широко применяемым в математике утверждениям ([1]): лемме Цорна, теореме Хаусдорфа, лемме Куратовского и некоторым другим (например, парадоксальному утверждению Хаусдорфа: половина поверхности сферы конгруэнтна её трети, см. [16] гл. IX, §5”).

Z8. Аксиома фундирования: $\forall x\ (\rceil x=\varnothing \Rightarrow \exists y(y\in x \wedge y \cap x=\varnothing))$,

цель которой постулировать, что не существует убывающих цепей $x_2 \in x_1$, $x_3 \in x_2$, $x_4 \in x_3,\ldots$

Система ZF Цермело—Френкеля получается из системы Z добавлением следующей аксиомы.

ZF9. Аксиома подстановки Френкеля: $\exists y\ \forall x\ (x\in y \Leftrightarrow \exists v\ (v\in z \wedge x = \iota\, t\, A(t,v)))$

(существует множество y, состоящее из тех элементов x, для которых имеет место $A(x,v)$, когда v пробегает все элементы множества z). Иначе говоря, y получается из z, если каждый элемент v из z заменить на $\iota\, t\, A(t,v)$.

Система ZF является очень сильной теорией. Все обычные теоремы математики могут быть формализованы в ней, т.е. можно указать выводимость каждой формулы, выражающей обычную теорему.

Теория T_1 – теория множеств для натуральных чисел

Так называют теорию, в которой есть все аксиомы системы Z, кроме аксиомы Z6 о существовании бесконечного множества [6]. В этой системе строятся натуральные числа: 0 отождествляется с $\varnothing$, т.е. с пустым множеством, 1 – с $\{\varnothing\}$, т.е. с множеством, элементом которого является пустое множество, 2 – с парой $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, 3 – с $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$. Вообще, если n отождествляется со множеством x, то $n+1$ отождествляется со множеством, состоящим из всех элементов множества x и самого множества x. Затем определяется предикат $N(x)$, означающий, что x есть натуральное число, даются определения операций сложения и умножения и доказываются свойства, записанные как аксиомы *1) – 9)* Пеано классической формальной арифметики. Этим оправдывается название теории.

Теория T_n, $n > 1$.

В этой теории ([6]) каждому множеству приписывается значение типа от 1 до n с тем, чтобы множества типа 1 были бы теми же, что и в теории T_1, а множества типа k являлись бы элементами множеств типа $k+1$ и состояли бы из элементов, являющихся множествами типа k-1. Каждая переменная в T_n обладает дополнительным индексом, принимающим значение от 1 до n, обозначающим тип этой переменной; при этом переменная x_i представляет множества типа i. Атомарные формулы в T_n имеют одну из следующих форм: $x_1 \in y_1$, $x_i \in y_{i+1}$ Аксиомы в T_n совпадают с аксиомами теории T_1 с тем отличием, что не все переменные имеют тип 1. Кроме того, в T_n входят также ещё две аксиомы.

Аксиома объёмности: Для каждого $i < n$ $\quad x_i = y_i \Rightarrow \forall w_i\ (x_i\in w_{i+1} \Leftrightarrow y_i\in w_{i+1})$.

Аксиома выделения: Для каждого $i < n$ и для всякой формулы $A\ (x_i)$ системы T_n , в которую y_{i+1} не входит свободно, $\quad \exists y_{i+1}\ \forall x_i\ (x_i\in y_{i+1} \Leftrightarrow A\ (x_i))$.

Для системы T_2 доказано, что теория действительных чисел строится в этой теории (так же, как арифметика строится в теории T_1), поэтому теорию T_2 называют теорией множеств для действительных чисел. Для системы T_3 показано, что теория всевозможных функций действительного переменного строится в этой теории, поэтому теорию T_3 называют теорией множеств для функций.

Система NBG Неймана – Бернайса – Гёделя.

В системе NBG добавляются новые переменные – классовые переменные $X,Y,Z,\ldots$ для обозначения новых сущностей – “классов”, которые призваны быть обозначать сверхмощные множества такие, как множество всех множеств, множество всех групп, множество всех вещественных линейных пространств и т.п. Под классами понимаются такие множества, которые не могут быть элементами никакого класса, но их элементами являются множества. Таким образом, среди формул системы ZF появляются также формулы типа $x\in Y$. Грубо говоря, аксиомы системы NBG записываются так же, как и аксиомы Цермело—Френкеля, только вместо множеств u, v, w пишут классы U, V, W везде, за исключением тех мест, где встречаются выражения типа $x\in Y$, тогда слева должна стоять переменная множества, т.е. маленькая латинская буква (см.[6],[1]). Главным моментом здесь является тот, что каждая теорема теории ZF является теоремой теории NBG, и каждая теорема теории NBG, касающаяся только множеств, является теоремой теории ZF. В таких случаях говорят, что более широкая теория, в данном случае теория NBG, является несущественным расширением более узкой теории, в данном случае теории ZF. Отметим, что идея выделить сверхмассивные объекты типа множества всех множеств среди всех множеств принадлежит выдающемуся американскому математику Джону (Яношу) фон Нейману, предложившему свою систему аксиом теории множеств (первая публикация – 1925г.). В 1937 – 1954 году вышли публикации швейцарского математика И.П. Бернайса, предложившего систему аксиом (система B Неймана – Бернайса), похожую на систему ZF и использующую идею фон Неймана. В 1940 году вышла публикация Курта Гёделя, система аксиом которого примыкает к системе B и существенно её упрощает, благодаря чему позже стало возможным, в частности, доказать, что система NBG Неймана – Бернайса – Гёделя непротиворечива, если непротиворечива система Z.

Некоторые дальнейшие результаты теории множеств.

Напомним, что континуумом называется связное хаусдорфово компактное топологическое пространство, непустое и включающее более, чем одну точку. Известно, что для любых двух континуумов существует биекция (взаимно-однозначное соответствие) между ними, т.е. они – равномощны, а также, что мощность множества всех подмножеств счётного множества равна мощности континуума. Широко известная континуум–гипотеза Кантора (1878г.) состоит в том, что всякое бесконечное подмножество континуума равномощно либо множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, либо множеству $\mathbb{R}$. Если обозначить множество всех подмножеств множества M через 2^M (в соответствии с общепринятым обозначением X^Y для множества всех отображений из множества Y в множество X, $2=\{0;1\}$), $\aleph_0$ мощность счётного множества, а через $2^{\aleph_0}$ мощность континуума, то гипотезу континуума можно записать как равенство $\aleph_1= 2^{\aleph_0}$, где $\aleph_1$ – первая несчётная мощность.

Пусть ZF^- обозначает систему ZF Цермело–Френкеля без аксиомы выбора. В 1937 году Гёдель доказал, что если ZF^- непротиворечива, то она остаётся непротиворечивой и после присоединения к ней аксиомы выбора и континуум – гипотезы. Это означает, что в теории ZF нельзя опровергнуть аксиому выбора и континуум–гипотезу. Вопрос о том, можно ли вывести в ZF аксиому выбора или континуум–гипотезу, был решён в 1963 году американским математиком Полом Коэном. Им было доказано, что если ZF^- непротиворечива, то она останется такой после присоединения к ней любой комбинации из аксиомы выбора, континуум–гипотезы или их отрицаний. Таким образом, обе проблемы независимы в ZF. Точно так же доказана независимость от аксиом ZF^- утверждения: всякое подмножество множества вещественных чисел измеримо по Лебегу.

7. ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Приведём краткие характеристики средств, с помощью которых представители логицизма, интуиционизма и формализма собирались навести порядок в основаниях математики. Логицисты (см.[22]) полагали, что можно построить математику на основе логики. А именно, в рамках исчисления предикатов определяются натуральные числа, операции сложения и умножения, доказываются свойства натуральных чисел и пр., но при рассмотрении конструкций анализа нужно пользоваться бесконечными множествами, постулируя существование хотя бы одного из них. Но именно аксиому бесконечности (Z6) не удаётся получить логическими средствами. Кроме того, теоремы Гёделя показали, что в полном исчислении предикатов нельзя построить неполную арифметику. Интуиционисты [7] (ныне конструктивисты), отстаивающие интуитивно безупречные мысленные построения, полагают, что право на доверие к ним имеют лишь финитные рассуждения, т.е. “всегда рассматривается лишь конечное и определённое число предметов и функций; эти функции точно определены, причём определение позволяет произвести однозначное вычисление их значений; никогда не утверждается существование какого-либо объекта без указания способа построения этого объекта; никогда не рассматривается как вполне определённое множество всех предметов *x* какой-либо бесконечной совокупности; если же говорится, что какое-то рассуждение (или теорема) верно для всех этих *x*, то это означает, что это общее рассуждение можно повторить для каждого конкретного *x*, причём само это общее рассуждение следует при этом рассматривать как образец для проведения таких конкретных рассуждений (Й. Эрбран, 1932г.)”. Таким образом, принцип исключённого третьего (аксиома 8 исчисления высказываний) и аксиома выбора не признаются убедительными. Но этим отметаются доказательства от противного, лемма Цорна, а вместе с ними также и большое число доказательств существования математических объектов, что не принимает большинство математиков. Отметим, что деятельность конструктивистов по строительству математики заново на принципах финитности продолжается. Формализм как метод обоснования математики предложен Гильбертом в 1904-1917г. (см. [8]): “нужно показать, что применяемые в математике методы достаточно сильны, чтобы получить всю классическую математику, в том числе всю канторовскую теорию множеств, но в то же время не настолько сильны, чтобы вывести противоречия. … Гильберт намеревался осуществить свою программу в два этапа. Прежде всего вся математика, он имел в виду главным образом арифметику, анализ и теорию множеств – должна быть формализована, т.е. надо построить формальную систему, из аксиом которой с помощью чётко определённых правил вывода следуют по крайней мере основы математики. … В качестве второго шага Гильберт собирался показать, что применение правил вывода никогда не сможет привести к противоречию. … Гильберт настаивал на том, чтобы в теории доказательств разрешалось пользоваться только финитными методами” (цитата из [1], стр. 318-321). Теоремы Гёделя о неполноте (теоремы 3,4) ознаменовали неудачу гильбертовой программы.

Отметим, что до сих пор трудности развития или неприятия большинством математиков у различных направлений перестройки оснований остаются и к ним добавляются новые. Отметим среди них парадокс известного американского логика Т. Сколема (Скулема): Поскольку язык любой теории, позволяющий строить формулы конечным числом подстановок, допускает лишь счётный набор формул, то и набор всех подмножеств в любой теории не более, чем счётен. Этот парадокс, с энтузиазмом встреченный интуиционистами, либо называют видимым, поскольку он не приводит к антиномиям внутри каждой из систем, либо пытаются обходить введением непредикативных формул, что только подчёркивает недостаточность фундамента в основаниях.

Предоставим слово авторитетам современной теории множеств. “У нас нет критериев, которые могли бы указать на правильный выбор из этих многих систем теории множеств” (А. Мостовский). “Подавляющее большинство математиков отказываются считать, что идеи Кантора были всего лишь болезненным бредом. Несмотря на то, что основания теории множеств всё ещё довольно шатки, эти математики продолжают с успехом применять понятия, методы и результаты теории множеств в большей части разделов анализа и геометрии, и даже отчасти в арифметике и алгебре, твёрдо веря, что работы по обоснованию теории множеств приведут в конце концов к её реабилитации в полном (или по крайней мере почти полном) её классическом объёме” (А. Френкель). Обе цитаты взяты из книги [1], стр.416.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Френкель и И. Бар-Хилел “Основания теории множеств”. М.,1966.
[2] Б.В. Бирюков “Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики”. М.,1985.
[3] А.Н. Боголюбов “Математики. Механики”. К., 1983.
[4] И. Букур и А. Деляну “Введение в теорию категорий и функторов”. М.,1972.
[5] Ван дер Варден “Пробуждающаяся наука”, М.:1959
[6] Ван Хао и Р. Мак-Нотон “Аксиоматические системы теории множеств”. М.,1963.
[7] А. Гейтинг “Интуиционизм”. М., 1965.
[8] Д. Гильберт и П. Бернайс “Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики”. М.,1979.
[9] Т. Йех “Теория множеств и метод форсинга”. М.,1973.
[10] С.К. Клини “Введение в метаматематику”.М.,1957.
[11] С.К. Клини “Математическая логика”. М.,1973.
[12] П. Коэн “Теория множеств и континуум–гипотеза”. М.,1969.
[13] Ю.И. Манин “Доказуемое и недоказуемое”. М.,1979.
[14] Сб. “Математическая теория логического вывода”. М.,1969.
[15] “Математическая энциклопедия”. Т I – V. М., 1977 – 1985.
[16] И.П. Натансон “Теория функций вещественной переменной, М.,1950,
[17] П.С. Новиков “Элементы математической логики”. М.,1972.
[18] Е. Расёва и Р. Сикорский “Математика метаматематики”. М.,1972.
[19] Б.А. Розенфельд “Неевклидовы пространства”. М.,1969.
[20] Р. Столл “Множества, логика, аксиоматические теории”. М., 1968.
[21] Д.Я. Стройк “Краткий очерк истории математики”. М.,1990.
[22] Уайтхед и Рассел “Принципы математики”, в 3-х томах (A.N. Whitehead, R. Russell “Principia mathematica”. Cambridge, England, 1910-1913).
[23] В.А. Успенский “Теорема Гёделя о неполноте”. М.,1982.
[24] А. Чёрч “Введение в математическую логику”.М.,1969.